

***DGRS***

**EFECTOS P- $\Delta$**

**EN LA RESPUESTA SISMICA**

**NO LINEAL**

**DIONISIO BERNAL**

**SERIE DE PUBLICACIONES TÉCNICAS PT-1**

**ABRIL 1985**

**SECRETARÍA DE ESTADO DE OBRAS PÚBLICAS Y COMUNICACIONES**



**REPÚBLICA DOMINICANA**  
**SECRETARÍA DE ESTADO DE OBRAS PÚBLICAS Y COMUNICACIONES**

**PRESENTACIÓN**

La Dirección General de Reglamentos y Sistemas de la Secretaría de Estado de Obras Públicas y Comunicaciones, se siente complacida en presentar el trabajo de investigación “Efectos P- $\Delta$  en la Respuesta Sísmica no Lineal”. Este trabajo, realizado por el Dr. Ing. Dionisio Bernal fue presentado originalmente, en una versión más reducida, en el 3er Congreso Latinoamericano de Ingeniería Sísmica, celebrado en Guayaquil, Ecuador en septiembre de 1984. Este artículo contiene los fundamentos analíticos de las estipulaciones que sobre efectos P- $\Delta$  aparecen en la propuesta para el nuevo Reglamento Sísmico Dominicano.

Con el presente documento se inicia lo que pretendemos se convierta en una serie de publicaciones técnicas de alta calidad (serie P.T.) destinadas a incentivar la investigación y difundir los resultados de las mismas.

**DIRECCIÓN GENERAL DE REGLAMENTOS Y SISTEMAS.**

JL/fma.

Abril 1985.

# EFFECTOS P- $\Delta$ EN LA RESPUESTA SÍSMICA NO LINEAL

DIONISIO BERNAL (\*\*)

## RESUMEN

En la primera parte de este artículo se presenta una revisión de los aspectos básicos del efecto P- $\Delta$  en la respuesta sísmica elástica e inelástica de sistemas de un grado de libertad. Para el caso de comportamiento elástico, se ilustra cómo las restricciones reglamentarias sobre distorsiones de entrepiso, aunadas a la forma típica de los espectros de desplazamiento relativo, limitan los efectos P- $\Delta$  a valores usualmente despreciables. A continuación se trata el problema de la estabilidad post-sismo de estructuras diseñadas para responder en el rango no lineal. Se ilustra en esta parte del trabajo que la ductilidad de diseño puede estar limitada por consideraciones de estabilidad. La parte principal del trabajo está dedicada al cálculo de factores de la amplificación P- $\Delta$  dinámicos en estructuras con respuesta no lineal. El criterio utilizado para definir las amplificaciones es esencialmente el de mantener la máxima ductilidad desplegada independiente de la carga vertical. En base a los resultados obtenidos se propone una expresión analítica para evaluar las amplificaciones P- $\Delta$  en el diseño sísmico. Se presenta también una discusión de las actuales especificaciones que sobre el tema aparecen en el ATC-3 y en el Código Sísmico Mexicano.

## INTRODUCCIÓN

En la evaluación de la respuesta dinámica de estructuras a la acción de movimientos sísmicos, los efectos de las cargas verticales actuando sobre los desplazamientos de la estructura deformada han sido usualmente despreciados. En el tratamiento convencional los efectos P- $\Delta$  se consideran en forma aproximada mediante correcciones en la fase de diseño. Es sabido que las cargas gravitacionales en una estructura elástica aumentan los períodos naturales y modifican las formas modales (1). Como en el análisis sísmico la sollicitación es función de las características dinámicas de la estructura, las cargas de gravedad (y los efectos P- $\Delta$  asociados) modifican, no sólo la respuesta a un conjunto de cargas laterales, sino las cargas en sí.

La forma típica de los espectros de desplazamiento relativo y las limitaciones reglamentarias sobre la máxima distorsión de entrepiso (refs. 2,3 y 4 por ejemplo) permiten demostrar que los efectos P- $\Delta$  dinámicos en estructuras elásticas son generalmente pequeños. Si el problema del diseño sísmico fuera realmente de análisis elástico, los efectos P- $\Delta$  serían, salvo raras excepciones, despreciables. Es sabido, sin embargo, que el comportamiento ante sollicitaciones sísmicas severas es altamente no lineal, y en estos casos, como se verá más adelante, los efectos P- $\Delta$  influyen drásticamente en la respuesta dinámica.

La supervivencia de las edificaciones sometidas a sismos severos es dependiente de su capacidad para disipar energía en el rango no lineal. El efecto de duplicidad ha sido utilizado para reconciliar las demandas inelásticas esperadas en la respuesta real con los métodos elásticos comúnmente empleados en el diseño estructural. Por razones prácticas, la mayoría de los edificios de cierta importancia son diseñados hoy en día en base a elementos mecánicos obtenidos de un análisis dinámico modal en el cual la sollicitación sísmica se representa a través de un espectro inelástico (2,5,6). Indudablemente el uso de métodos elásticos de análisis en la solución del problema realmente inelástico del diseño sísmico, ha contribuido a mantener algo disfrazada la gran importancia de los efectos P- $\Delta$ .

(\*\*) Asesor, Dirección General de Reglamentos y Sistemas, Secretaría de Estado de Obras Públicas y Comunicaciones, Santo Domingo, República Dominicana.

La acción de las cargas gravitacionales sobre una estructura elasto-plástica conduce, entre otras cosas, a una pendiente negativa en la rama post-fluencia de la curva carga-deformación; la situación se ilustra esquemáticamente en la fig. 1. Cuando una estructura con este tipo de relación carga-deformación se ve sometida a un sismo severo existe una tendencia a que las incursiones en el rango plástico ocurran en una misma dirección (fig.1). Este fenómeno reduce progresivamente la capacidad efectiva ante cargas laterales y puede conducir a una falla por inestabilidad durante la respuesta dinámica (conocida como colapso incremental o "Crawling" en terminología inglesa), o reducir el factor de seguridad ante inestabilidad por cargas verticales a un valor inaceptablemente bajo.

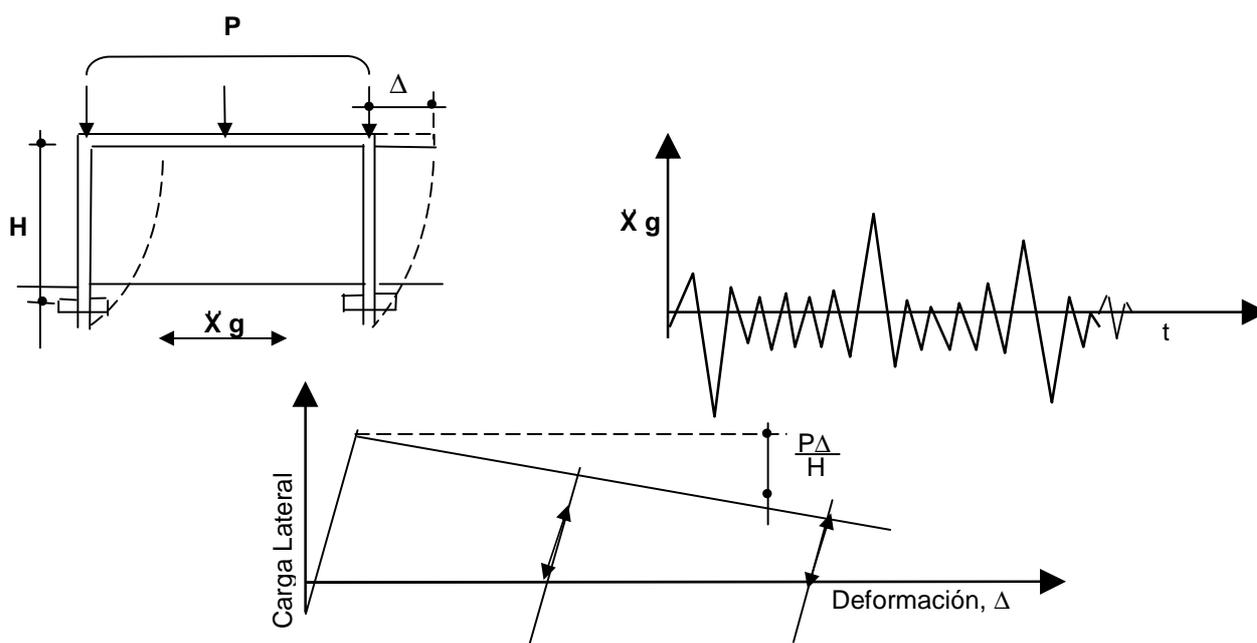


Figura 1. Efectos P-Δ en una Estructura Elasto-Plástica

De hecho puede demostrarse que si los efectos gravitacionales son incluidos en el análisis, toda estructura elasto-plástica sometida a un disturbio Gaussiano de suficiente duración eventualmente colapsa (1). Husid (7,8) analizó varios sistemas de un grado de libertad (SUGL) y presentó una expresión para el tiempo promedio al colapso. Bertero y Popov (9) han ilustrado experimentalmente la importancia de los efectos P-Δ en el comportamiento inelástico de varias subestructuras formadas por vigas y columnas. Estos autores han puntualizado la necesidad de limitar la ductilidad de diseño de forma tal que pueda prevenirse, o al menos minimizarse, la posibilidad de colapso incremental (crawling) durante la respuesta dinámica inelástica.

Este artículo presenta los resultados obtenidos en un proyecto de investigación sobre efectos P-Δ en el diseño sismo-resistente. El proyecto forma parte de un conjunto de trabajos realizados en relación con la elaboración del nuevo Reglamento Sísmico Dominicano para Edificaciones (4).

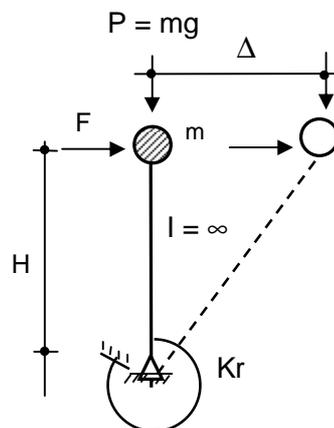
Los objetivos de este trabajo son: (a) presentar una expresión analítica que limita la ductilidad de diseño en base a consideraciones de estabilidad y (b) describir los procedimientos utilizados y los

resultados obtenidos en el desarrollo de un método para considerar los efectos P-Δ en el diseño sísmico inelástico.

Se presenta también, bajo la luz de los resultados aquí obtenidos, una discusión sobre las actuales especificaciones sobre efectos P-Δ que aparecen en el ATC-3 (2) y en las Normas Mexicanas (3,10).

### ASPECTOS BÁSICOS SOBRE LOS EFECTOS P-Δ Comportamiento Elástico

Considérese el sistema de un grado de libertad que se ilustra en la fig. 2. Por razones de simplicidad y claridad en la deducción que sigue la columna se ha tomado como infinitamente rígida; la flexibilidad se introduce a través de un resorte rotacional en la base.



**Figura 2. Sistema de un Grado de Libertad Considerado**

La rigidez lateral del sistema, K, se obtiene a través de simples consideraciones de estática como sigue:

El momento en la base para un desplazamiento Δ del tope, está dado por

$$M = \frac{\Delta}{H} K_r \tag{1}$$

donde  $K_r$  es la rigidez rotacional del resorte en la base. El momento es también

$$M = FH + P\Delta \tag{2}$$

igualando las ecs. 1 y 2 y solucionando para  $K = F/\Delta$  se obtiene

$$K = \frac{K_r}{H^2} - \frac{p}{H} \quad (3)$$

definiendo la rigidez para  $P = 0$  como  $K_0$ , esto es

$$K_0 = \frac{K_r}{H_2} \quad (4)$$

la ec. 3 puede expresarse como

$$K = K_0(1 - \theta) \quad (5)$$

donde  $\theta$ , conocido como el coeficiente de estabilidad, es un parámetro adimensional dado por

$$\theta = \frac{P}{K_0 H} \quad (6)$$

Como puede verse de la ec. 5 la acción de la gravedad en un sistema elástico conduce a una reducción en la rigidez. El parámetro adimensional  $\theta$  gobierna el comportamiento.

La reducción en la rigidez lateral tiene como consecuencia un incremento en el período natural de vibración. Puede demostrarse fácilmente que el período, incluyendo los efectos de la gravedad, está dado por

$$T = \frac{T_0}{(1 - \theta)^{1/2}} \quad (7)$$

donde  $T_0$  es el período con  $P = 0$

Para el caso de un sismo en particular, la elongación en el período puede aumentar o disminuir la respuesta dinámica del sistema; todo depende de los valores relativos de las ordenadas espectrales para el período original (sin gravedad) y el modificado \*.

Cuando se considera un espectro de diseño suavizado, la variación caótica de las ordenadas espectrales desaparece y es posible entonces (una vez fijada la forma espectral) establecer las amplificaciones a que conduce la inclusión de los efectos  $P-\Delta$  en la respuesta dinámica.

Considérese el espectro de pseudoaceleración típico que se ilustra en la fig. 3a. El espectro de desplazamiento se obtiene multiplicando las ordenadas espectrales para un período dado por  $(2\pi/T)^2$  (o lo que es lo mismo dividiendo entre  $\omega^2$ ) el resultado se ilustra en la parte (b) de la figura. Como el máximo momento para el SUGL considerado es proporcional a la deformación relativa,  $\Delta$ , (ec. 1) el factor de amplificación por efectos  $P-\Delta$  puede definirse como

$$\alpha_e = \frac{Sd\theta}{Sd_0} \quad (8)$$

\* En el caso de sistemas reales con flexibilidad distribuida, existen algunas consideraciones adicionales asociadas a los cambios en las formas de las elásticas: esto no altera, sin embargo, la línea básica del razonamiento previamente expuesto.

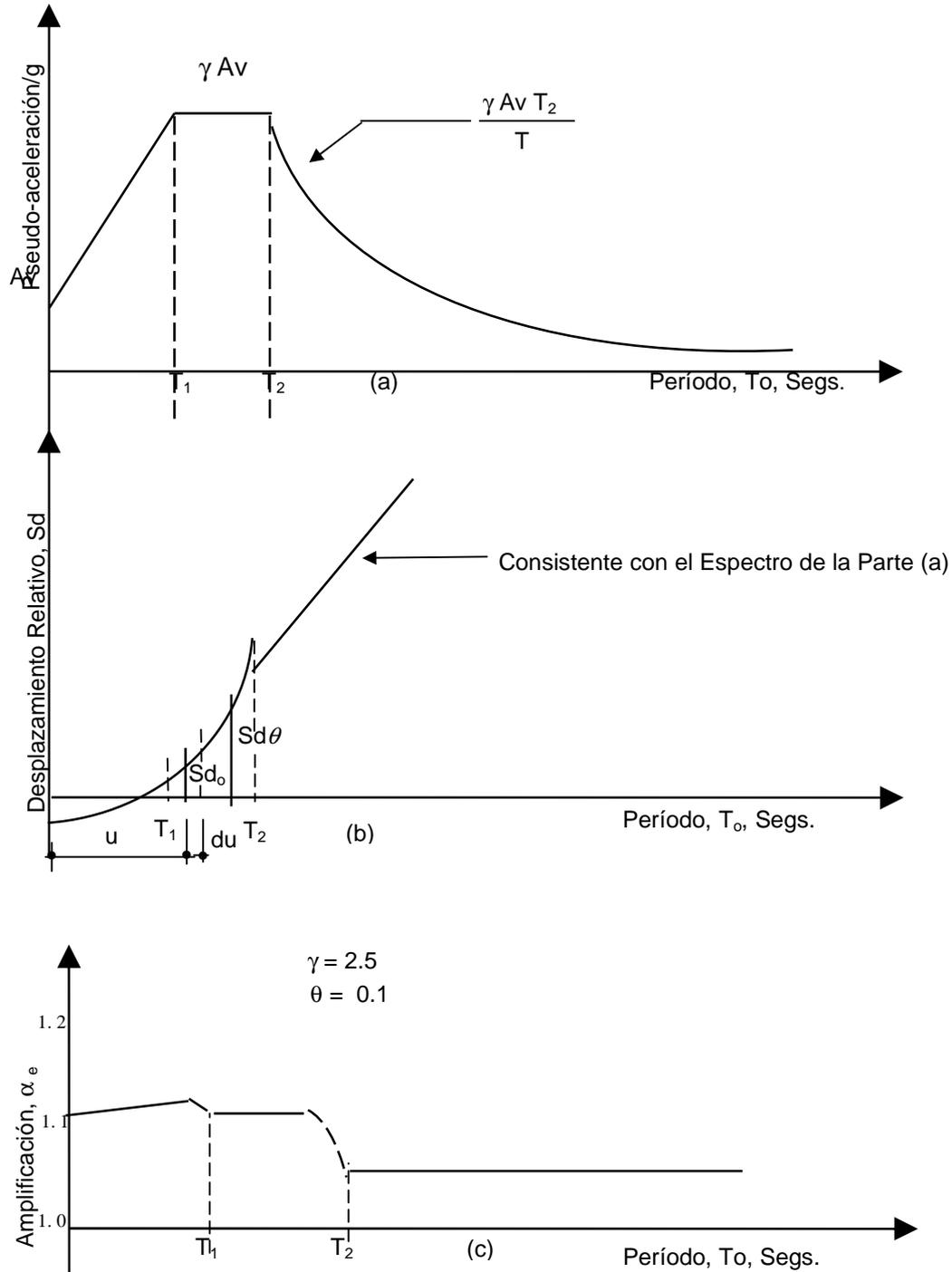


Figura 3. (a) Espectro de Pseudoaceleración Típico.  
 (b) Espectro de Desplazamiento Relativo.

- (c) Amplificaciones por Efecto P-Δ Consistente con (a) y (b)  
para  $\gamma = 2.5$  y  $\theta = 0.10$

donde  $Sd_\theta$  y  $Sd_0$  son las ordenadas del espectro de desplazamiento relativo para un valor dado de  $\theta$  y  $\theta = 0$  respectivamente, (ambas referidas a un mismo período).

Utilizando la notificación de la fig. 3b se tiene

$$Sd_0 = Sd_0 + \int_{T_0}^T Sd \, du \quad (9)$$

La ecuación 9 no es válida cuando el intervalo de integración incluye a  $T_1$  o  $T_2$  ya que en estos puntos, para el espectro de la fig. 3, la función  $Sd$  es discontinua. Si se integra entre los límites donde  $Sd$  es continua, resultan dos pequeños intervalos del período donde  $\alpha_e$  no queda definida por la ecuación 9. Para los propósitos que aquí interesan, los resultados pueden interpolarse en estas zonas. (En realidad el asunto es académico pues la discontinuidad en  $Sd$  no es real sino proveniente de la definición tri-segmental del espectro de pseudoaceleraciones).

Dividiendo la ec. 9 entre  $Sd_0$  y combinando con la ec. 8 se tiene:

$$\alpha_e = 1 + \int_{T_0}^T \frac{Sd}{Sd_0} \, du \quad (10)$$

Para el espectro de la fig. 3 las expresiones para  $Sd/Sd_0$  son

$$\frac{Sd}{Sd_0} = \frac{2u(1 + 1.5 \frac{u}{T_1} (\gamma - 1))}{T_0^2 (1 + \frac{T_0}{T_1} (\gamma - 1))} \quad 0 \leq T_0 \leq T_1 (1 - \theta)^{1/2} \quad (11)$$

$$\frac{Sd}{Sd_0} = \frac{2u}{T_0^2} \quad T_1 \leq T_0 \leq T_2 (1 - \theta)^{1/2} \quad (12)$$

$$\frac{Sd}{Sd_0} = \frac{1}{T_0} \quad T_0 \geq T_2 \quad (13)$$

Sustituyendo las ecs. 11-13 en la ec. 10, integrando y utilizando la relación proporcionada por la ec. 7 se llegan a las siguientes expresiones para el factor de amplificación

$$\alpha_e = \frac{1}{(1-\theta)} \frac{1+E(1-\theta)^{-1/2}}{(1+E)} \quad 0 \leq T_0 \leq T_1(1-\theta)^{1/2} \quad (14)$$

donde 
$$E = (\gamma - 1) \frac{T_0}{T_1} \quad (15)$$

$$\alpha_e = \frac{1}{(1-\theta)} \quad T_1 \leq T_0 \leq T_a \quad (1-\theta)^{1/2} \quad (16)$$

$$\alpha_e = \frac{1}{(1-\theta)^{1/2}} \quad T_0 \geq T_2 \quad (17)$$

Las ecuaciones 14, 16 y 17 están graficadas en la fig. 3c. para el caso  $\theta = 0.1$  y  $\gamma = 2.5$ .

Aunque en teoría los valores de  $\theta$  se encuentran entre cero y la unidad, es posible demostrar (y se hará más adelante en el artículo) que las limitaciones reglamentarias sobre los desplazamientos de entrepiso limitan los valores de  $\theta$  a un rango mucho menor. Coeficientes de estabilidad,  $\theta$ , mayores de 0.15 son poco probables en casos prácticos.

Es aparente de las deducciones anteriores que las amplificaciones dinámicas por esbeltez en el rango lineal, para los valores de  $\theta$  de interés práctico, son pequeñas; (para  $\theta = 0.1$  la máxima amplificación para cualquier período es del orden del 11%). Se ilustrará en las siguientes secciones que la situación es totalmente diferente al considerarse el comportamiento inelástico.

### Comportamiento Inelástico

Considérese de nuevo el SUGL de la fig. 2 pero esta vez con un resorte en la base con características elasto-plásticas. Por conveniencia el sistema se ilustra de nuevo en la fig. 4 junto a la curva momento-rotación del resorte. La relación carga horizontal versus deformación del tope se calcula como sigue:

La rigidez original se obtiene de la ec. 5

$$K = K_0 (1 - \theta)$$

La deformación de fluencia es

$$\Delta_y = \frac{My H}{Kr} \quad (18)$$

Nótese que para este sistema la expresión para la deformación de fluencia es independiente de la carga gravitacional, P. En una estructura con flexibilidad distribuida esta independencia no se mantiene en rigor pero puede demostrarse que la mencionada deformación permanece insensitiva al valor de la carga de gravedad. Esta propiedad se utilizará más adelante en algunas deducciones analíticas.

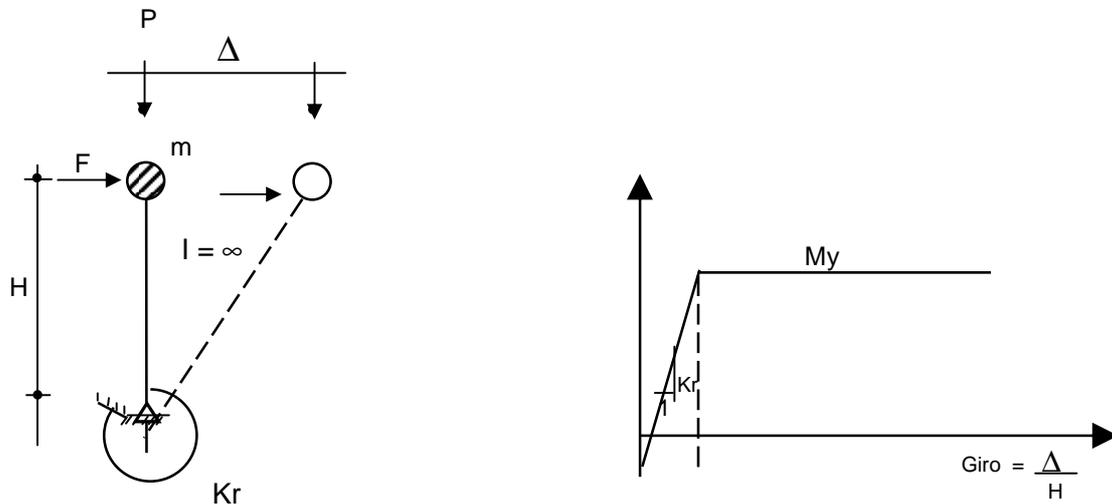


Figura 4. SUGL con Resorte Elasto-Plástico en la Base.

La fuerza de fluencia es:

$$F_y = K \quad y = K_0 \quad \Delta_y \quad (1 - \theta) \quad (19)$$

Para que el momento en la base permanezca constante en la parte post-fluencia de la curva carga-deformación, es necesario que la carga lateral, para \$\Delta\$ mayor que \$\Delta\_y\$, esté dada por

$$F = F_y - \frac{P}{H} (\Delta - \Delta_y) \quad \Delta \geq \Delta_y \quad (20)$$

La pendiente de la porción inelástica es entonces

$$\frac{(F - F_y)}{(\Delta - \Delta y)} = - \frac{P}{H} = -K_0 \quad 0 \quad (21)$$

La relación carga-deformación completa para aplicación monótonica de carga lateral se ilustra en la fig. 5 para  $P = 0$  y para un valor arbitrario de  $P$  mayor que cero. Para comportamiento histerético las pendientes de carga y descarga pueden suponerse paralelas a la pendiente elástica original considerando la carga  $P$  actuante.

Un examen de la curva carga-deformación de la fig. 5 indica que para el caso de comportamiento inelástico el efecto  $P-\Delta$ , además del cambio en la pendiente original, conduce a: (a) una reducción en la carga lateral de fluencia y (b) una pendiente negativa de la rama post-fluencia del diagrama. Ambas modificaciones influyen significativamente en la respuesta dinámica no lineal del sistema.

Desde el punto de vista de la reducción en la carga lateral de fluencia, se deduce de las relaciones que aparecen en la fig. 5, que los efectos  $P-\Delta$  pueden “tomarse en cuenta” multiplicando el nivel de fluencia necesario al despreciar la gravedad por el factor  $\alpha$  donde:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \theta}$$

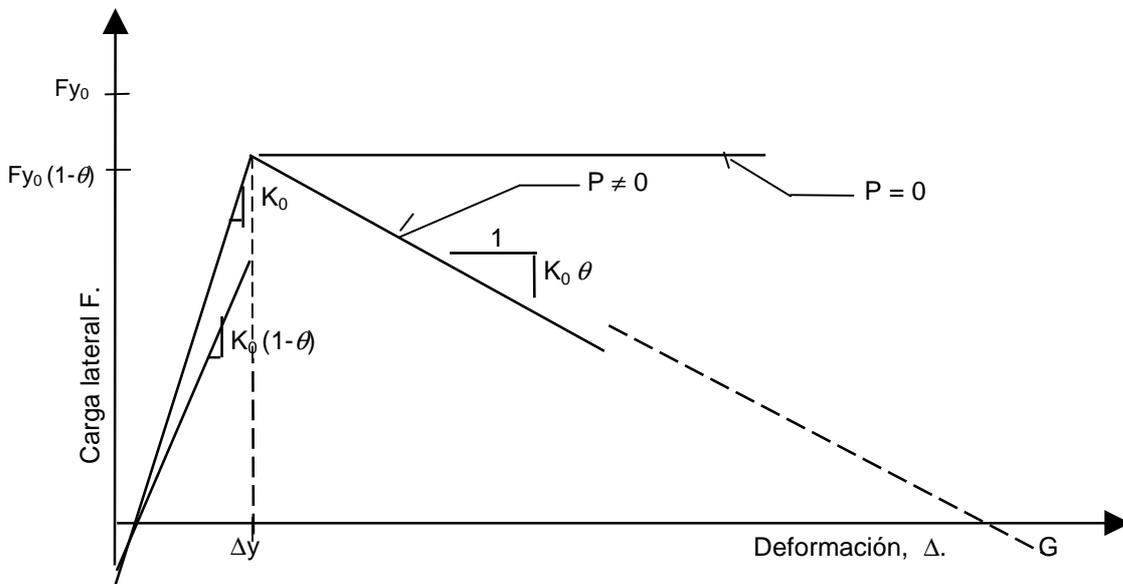


Figura 5. Relaciones Carga Lateral – Deformación para el Sistema de la Figura 4.

Este es de hecho el procedimiento utilizado en el ATC-3 (2). Se ilustra más adelante que el mismo yerra consistentemente del lado de la inseguridad ya que de ninguna manera incluye la influencia de la porción descendente de la curva carga-deformación.

Aunque para el caso de comportamiento elasto-plástico ( $P = 0$ ) las deformaciones permanentes después de un evento intenso no son de particular importancia (con la excepción quizás de la

ductilidad desplegada en sí) en el caso donde se incluye la gravedad, las consideraciones de estabilidad hacen de la configuración final un asunto de primordial importancia.

Es aparente que el punto G en la fig. 5 representa el límite teórico para el cual el sistema se hace inestable bajo la acción de la carga gravitatoria. La expresión analítica para G se obtiene fácilmente de las relaciones que aparecen en la figura; se tiene:

$$G = \frac{AY}{\theta} \quad (22)$$

Dividiendo la ecuación 22 por  $\Delta_y$  y reconociendo  $\frac{G}{\Delta Y}$  como un factor de ductilidad se tiene;

$$\mu = \frac{1}{0} \quad (23)$$

La ecuación 23 ilustra como, independiente de cualquier otra condición restrictiva, la ductilidad de diseño puede estar limitada por consideraciones de estabilidad relacionadas con efectos P- $\Delta$ . El límite de  $\mu$  en función de  $\theta$  de la ecuación 23 no es directamente utilizable en la formulación de criterios de diseño ya que el mismo permite una situación de virtual inestabilidad (equilibrio indiferente) al concluir el evento de diseño. Es obvio que un límite mucho más estricto es necesario para asegurar que la resistencia de la estructura ante cargas gravitacionales, post-sismo de diseño, se mantenga a un nivel adecuado. El cociente entre la carga gravitacional máxima y la supuesta actuante en la evaluación de la repuesta sísmica (y por lo tanto en el cálculo de  $\theta$ ) se denomina aquí "cociente de cargas" y se utilizará el símbolo  $\lambda$  para su tratamiento matemático. El desarrollo de una expresión analítica que relacione la ductilidad de diseño,  $\mu$ , el coeficiente de estabilidad,  $\theta$ , y el cociente de cargas,  $\lambda$ , es uno de los objetivos principales de este trabajo; el asunto se trata en la siguiente sección.

### **LÍMITE EN LA DUCTILIDAD DE DISEÑO POR CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD**

Los parámetros que aparecen en la deducción que se presenta en lo que sigue se encuentran en la fig. 6. De las tres curvas de la figura la superior representa el caso donde no hay cargas gravitacionales, la intermedia corresponde al nivel de carga axial supuesto presente durante la actuación del sismo de diseño (por lo general carga muerta más 25 por ciento de la carga viva) y la inferior a la máxima carga gravitatoria para la cual debe prevenirse una falla por inestabilidad ante la acción de cargas verticales solamente. Nótese que la deformación de fluencia es la misma para las tres curvas, la justificación de esta hipótesis fue presentada anteriormente en conexión con la

discusión de la ec. 18. Implícita en la deducción que sigue se encuentra la hipótesis (muy precisa para los propósitos que aquí interesan) de que las deformaciones del tope son pequeñas en relación con la altura de la columna (fig. 4).

La máxima deformación permanente posible después de una repuesta donde la ductilidad sea  $\mu$ , está dada por:

$$\Delta f = \mu \Delta y - \Delta_0 \tag{24}$$

donde

$$\Delta_0 = \frac{B}{K_0(1-\theta)} \tag{25}$$

de las relaciones que se ilustran en la fig. 6

$$B = F_{y_0}(1-\theta) - C \tag{26}$$

donde

$$C = \theta K_0 \Delta_y (\mu - 1) \tag{27}$$

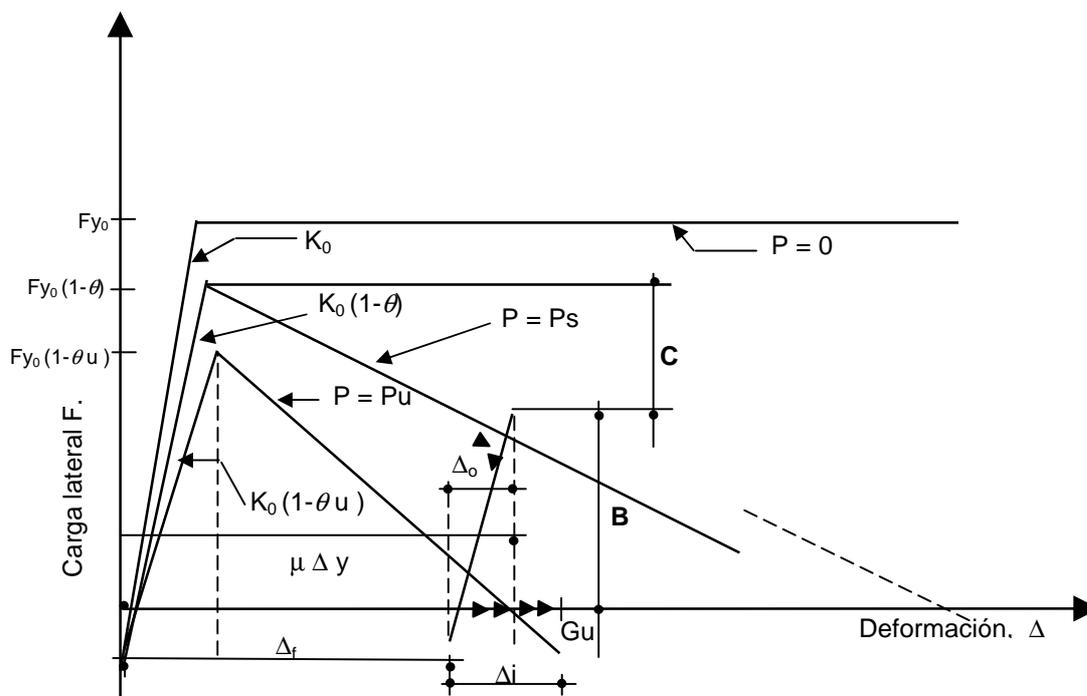


Figura 6. Relaciones Carga Lateral – Deformación utilizada en la Deducción de la Ecuación 37.

Sustituyendo la ec. 27 en la 26 y el resultado en la 25 y reconociendo que  $F_y = K_0 \Delta_y$  se encuentra, después de ciertas manipulaciones algebraicas, que la expresión para  $\Delta_0$  se reduce a:

$$\Delta_0 = \Delta_y \frac{1 - \mu\theta}{(1 - \theta)} \quad (28)$$

Sustituyendo la ec. 28 en la 24 se obtiene

$$\Delta_f = \Delta_y \frac{(\mu - 1)}{(1 - \theta)} \quad (29)$$

Debido a la deformación permanente,  $\Delta_f$ , un incremento en la carga de gravedad induce un aumento en la deformación lateral; este efecto se ilustra esquemáticamente con flechas en el eje de las deformaciones en la fig. 6. La expresión general para  $\Delta_i$  es:

$$\Delta_i = (P_u - P_s) \frac{\Delta f}{K_0 H (1 - 0_u)} \quad (30)$$

Donde  $P_u$  es la máxima carga vertical que se requiere la estructura sea capaz de resistir sin que ocurra una falla por inestabilidad y  $P_s$  es la carga vertical presente durante la actuación del sismo. En la expresión anterior;

$$0_u = \frac{P_u}{K_{0H}} \quad (31)$$

De la fig. 6 se tiene que

$$G_u = \Delta f + \Delta i \quad (32)$$

Sustituyendo las ecs. 29 y 30 en la 32 se obtiene

$$G_u = \Delta_y \frac{(\mu - 1)}{(1 - \theta)} \left( 1 + \frac{(P_u - P_s)}{K_0 H (1 - \theta u)} \right) \quad (33)$$

El cociente de cargas,  $\lambda$ , está definido como

$$\lambda = \frac{P_u}{P_s} \quad (34)$$

Combinado las ecs. 31 y 6 se tiene que

$$\theta_u = \frac{P_u}{P_s} \theta = \lambda \theta \quad (35)$$

Sustituyendo las ecs. 34 y 35 en 33 y realizando algunas manipulaciones algebraicas se llega a la siguiente expresión:

$$G_u = \Delta y \frac{(\mu - 1)}{(1 - \lambda \theta)} \quad (36)$$

de la ec. 22

$$G_u = \frac{\Delta y}{\theta_u} = \frac{\Delta y}{\lambda \theta}$$

Igualando la expresión anterior con la 36 se obtiene finalmente la relación analítica entre los parámetros  $\mu$ ,  $\theta$  y  $\lambda$ . Solucionando para  $\mu$  en términos de  $\lambda$  y  $\theta$  se tiene

$$\mu = \frac{1}{\lambda \theta} \quad (37)$$

La similaridad entre las ecs. 23 y 37 sugiere la posibilidad de derivar la última en base a la primera directamente. De hecho esto es posible a través de argumentos fundamentados en las hipótesis básicas establecidas. La deducción analítica presentada anteriormente fue incluida por considerarse más explícita e ilustrativa.

De la ec. 37 se deduce que:

Si una estructura, idealizable como un SUGL, ha de retener la capacidad de resistir un nivel de carga gravitacional  $P_u$  después de haber incurrido en un comportamiento inelástico inducido por un sismo severo, la máxima deformación que puede permitirse durante la repuesta está limitada a la intersección de la relación carga-deformación con el eje horizontal para la carga  $P_u$ .

Si el valor del cociente de cargas,  $\lambda$ , se toma como 2.5 (el criterio utilizado para fijar  $\lambda$  se trata en la siguiente sección) la ductilidad de diseño, de acuerdo a la ec. 37, está limitada a  $0.4/\theta$ . Para un coeficiente de estabilidad de 0.13 (el cual es un valor factible) el límite es entonces  $0.4/13 = 3.08$ ;

este valor es mucho menor que las ductilidades de diseño que se permiten en algunos reglamentos para “pórticos dúctiles” (2,3). La ec. 37 está graficada en la fig. 7 para varios valores de  $\lambda$ .

Aunque teóricamente los valores del coeficiente de estabilidad,  $\theta$ , se encuentran entre cero y la unidad, es posible demostrar que en la práctica las restricciones reglamentarias sobre las deformaciones de entrepiso limitan los posibles valores de  $\theta$  a un rango mucho más pequeño.

A continuación se presenta el desarrollo de las relaciones que permiten cuantificar el rango de valores de  $\theta$  de interés.

El cortante sísmico está dado por:

$$V = C_i P \quad (38)$$

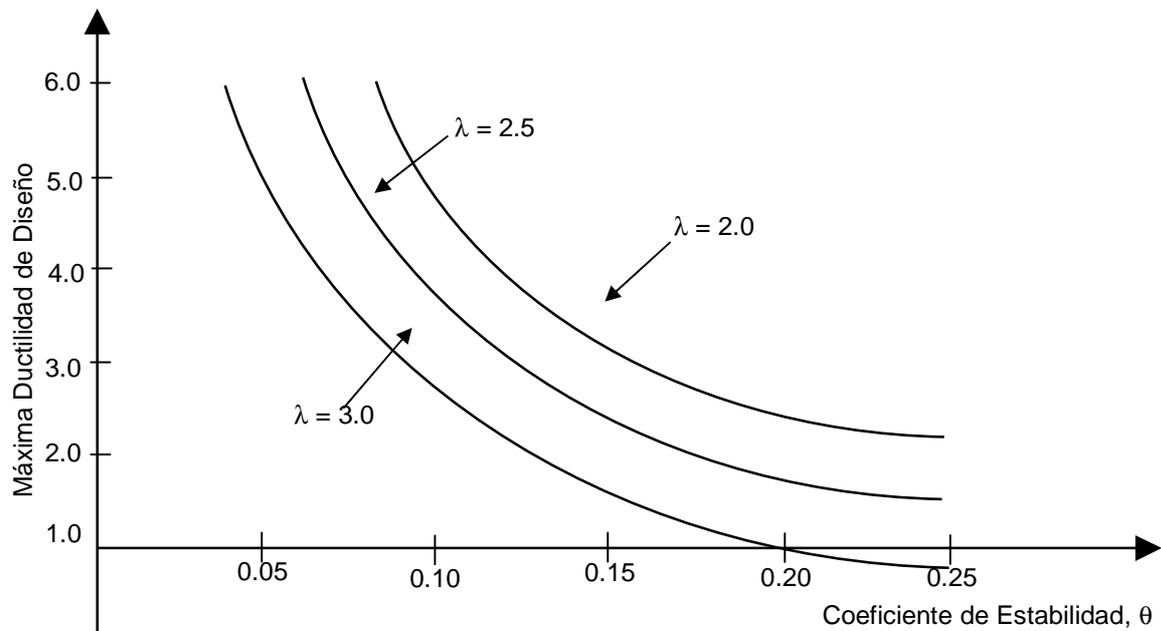


Figura 7. Valores de la Ductilidad Límite Vs. Coeficiente de Estabilidad para varios cocientes de carga,  $\lambda$ . Donde  $C_i$  es el coeficiente de pseudo aceleración espectral, también llamado simplemente coeficiente sísmico (incluye la reducción por ductilidad). Combinando las ecs. 38 y 6,  $\theta$ , puede expresarse como

$$\theta = \frac{V}{C_i K_0 H} \quad (39)$$

Se tiene que

$$\Delta y = \frac{V}{K_0} \quad (40)$$

Multiplicando la ec. 40 por el factor de ductilidad,  $\mu$ , y reconociendo que  $\Delta_u = \mu \Delta_y$  se obtiene

$$V = \frac{K_0 \Delta_u}{\mu} \quad (41)$$

Sustituyendo la ec. 41 en la 39

$$0 = \frac{\Delta_u}{HC_i \mu} \quad (42)$$

Pero  $C_i \mu$  no es más que la ordenada espectral elástica  $C$  (excepto para períodos muy cortos que no son de interés aquí), tomando  $\psi = \Delta_u / H$  se tiene:

$$\theta = \frac{\psi}{C} \quad (43)$$

La distorsión de entrepiso,  $\Psi$ , (deformación relativa entre la altura), está limitada en las normas sísmicas.

Utilizando el valor límite de 0.015 para  $\Psi$  y la ecuación para el coeficiente sísmico  $C$  del ATC-3 (ref. 2) se tiene de la ec. 43 que

$$\theta = \frac{0.0125 T^{2/3}}{A_v} \quad (44)$$

Los valores de  $A_v$  de la ref. 2 oscilan entre 0.05 y 0.4 dependiendo de la zona sísmica que se trate. Como puede verse los máximos posibles valores del coeficiente de estabilidad,  $\theta$ , aumentan con el período y disminuyen con la aceleración máxima del terreno  $A_v$ . El valor de 0.13 utilizado en el ejemplo numérico relativo al uso de la ec. 37 se obtuvo de la ec. 44 tomando un valor intermedio para  $A_v$  de 0.15 y un período de  $T$  de 2 segs.

Un estudio de la ec. 43 (y 44 en el caso particular de la ref. 2) indica que aunque no existe ningún límite superior para el coeficiente de estabilidad  $\theta$ , (salvo el caso en que el reglamento estipule un

mínimo valor para C), los valores de este parámetro son rara vez mayores de 0.15 y por lo general no exceden 0.10.

Si bien la ec. 37 provee un límite para la ductilidad de diseño basado en consideraciones de inestabilidad, la misma no proporciona ninguna información sobre cómo evaluar los efectos P- $\Delta$  dinámicos en la respuesta inelástica. El resto de este artículo está dedicado a presentar el procedimiento utilizado y los resultados obtenidos en un estudio dirigido al desarrollo de metodología para “tomar en cuenta” los efectos P- $\Delta$  en el diseño sismo-resistente.

### **EFFECTOS P- $\Delta$ EN LA RESPUESTA INELASTICA: CRITERIO DE CUANTIFICACION**

Antes de entrar de lleno en el desarrollo de fórmulas específicas para factores de amplificación por efectos P- $\Delta$ , es conveniente definir claramente cual es el objetivo que se persigue.

Idealmente, la metodología para tomar en cuenta los efectos P- $\Delta$  debería, cuando se utilice en conjunción con especificaciones reglamentarias, conducir a diseños estructurales cuyas confiabilidades (probabilidad de cumplir su función adecuadamente) sean independientes de las cargas gravitacionales actuantes.

En el caso elástico la intención general del párrafo anterior puede suponerse satisfecha especificando factores de amplificación definidos como el cociente entre las máximas respuestas obtenidas, primero incluyendo, y luego despreciando los efectos de la gravedad sobre las deformaciones. La antes mencionada definición no es aplicable, al menos directamente, al caso de comportamiento inelástico ya que entonces, con la excepción de las deformaciones, los valores máximos de los parámetros que intervienen en la respuesta son, en general, independiente de la acción de las cargas verticales, igual a los límites de fluencia.

Ya que el objetivo básico de un diseño sísmico inelástico es la selección del nivel de fluencia para una ductilidad dada, es posible definir los factores de amplificación P- $\Delta$  en base al incremento necesario en dicho nivel para mantener la ductilidad desplegada independiente de los efectos de la carga vertical.

El incremento en la probabilidad de colapso con la duración del sismo para un sistema inelástico donde se consideran los efectos gravitacionales (1, 7, 8); la alta probabilidad de ocurrencia de sismos menores (aftershocks) después del sismo de diseño y el hecho de que los problemas de inestabilidad no tienen sentido al despreciarse las cargas verticales, son algunos de los factores que hacen muy difícil, sino imposible, la definición de un criterio de diseño basado en equiparar probabilidades de colapso, aún y cuando esta equiparación se intente sólo a nivel intuitivo.

Aunque el criterio para cuantificar los efectos P- $\Delta$  en base a mantener la ductilidad constante es un tanto simplista, el mismo provee, en la opinión del autor, un marco razonable para desarrollar

fórmulas prácticas para el factor de amplificación y es consistente con el nivel de rigor implícito en los reglamentos sísmicos en general.

En resumen, para los propósitos de este artículo, la condición idealmente perseguida de diseños cuyas confiabilidades sean independientes del nivel de cargas verticales se supone razonablemente satisfecha si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- 1- Las ductilidades desplegadas con o sin incluir los efectos de gravedad son iguales; y
- 2- La máxima ductilidad para un coeficiente de estabilidad,  $\theta$ , no excede el valor dado por la ec. 37 tomando el cociente de cargas,  $\lambda$ , igual a 2.5.

El valor de 2.5 para  $\lambda$  fue seleccionado en base al cociente entre las combinaciones de carga  $1.4 D + 1.7 L$ , que representa la carga vertical máxima, y  $D + 0.25 L$ , supuesta como representativa del nivel de carga vertical durante la actuación del sismo de diseño (y por tanto la base para evaluar  $\theta$ ). Un factor,  $\phi$ , de reducción en la capacidad nominal se incluyó también en la formulación (notación ref. 11). Analíticamente, lo expresado anteriormente se convierte en

$$\lambda = \frac{(1.4 D + 1.7 L)}{\phi (D + 0.25 L)}$$

Haciendo  $L = 0.25D$  (razonable en edificios) y tomando  $\phi = 0.7$  la expresión anterior conduce a  $\lambda = 2.45$ ; considerando la naturaleza de los cálculos realizados este valor fue redondeado a 2.5.

Los factores de amplificación consistentes con los criterios aquí establecidos se desarrollan en la siguiente sección.

## FACTOR DE AMPLIFICACION POR EFECTOS P-Δ INELASTICOS

### Metodología

La ecuación de equilibrio dinámico para un SUGL sometido a una excitación traslacional de su base está dada por

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + \bar{R}(u, \theta) = -m \ddot{x}_g(t) \tag{45}$$

donde  $m$  es la masa,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $x_g(t)$  es la historia de la aceleración del terreno y  $R(u, \theta)$  es la función de resistencia. Para el caso particular de un sistema elasto-plástico la función  $R(u, \theta)$  es de la forma dada en la fig. 5.

Para una excitación dada,  $xg(\ddot{t})$ , la solución de la ec. 45 es función de los siguientes parámetros independientes:  $T_o$ ,  $\theta$  y  $F_{y0}$ , donde  $F_{y0}$  es el valor de la carga lateral de fluencia cuando  $P = 0$  (ver fig. 4), el amortiguamiento se tomó como 5% del crítico en todos los casos tratados.

Con la restricción de mantener constante la ductilidad desplegada en la respuesta es posible generar el espectro de  $F_{y0}$  para distintos valores del coeficiente de estabilidad  $\theta$ . El cociente entre los resultados para un valor de  $\theta$  y los de  $\theta = 0$  definen el espectro de amplificación por efectos P- $\Delta$  inelásticos para el valor de  $\theta$  y la ductilidad seleccionados. En detalle los pasos realizados fueron:

1) Se calculó, por iteraciones sucesivas, para un período dado  $T_o$ , el nivel de fluencia necesario para que la ductilidad desplegada en la respuesta a la aceleración  $xg(\ddot{t})$  tenga un valor predeterminado  $\mu$ ; en este paso  $\theta = 0$ . Al valor de la carga de fluencia obtenida llámesele  $F_{y00}$ .

2) Se calculó, para el mismo período  $T_o$ , usando un valor de  $\theta$  diferente de cero, el nivel de fluencia necesario para que la ductilidad sea igual a la del paso (1). Al valor de la carga de fluencia obtenida llámesele  $F_{y0\theta}$ . Nótese que esta no es la carga efectiva de fluencia sino la que se tendría si  $P = 0$ . Se consideraron 8 valores de  $\theta$  uniformemente espaciados entre 0.025 y 0.20. El cálculo de  $F_{y0\theta}$ , al igual que el de  $F_{y00}$ , conlleva un proceso de aproximaciones sucesivas donde cada iteración requiere la integración numérica de la ec. 45.

3) El factor de amplificación para la combinación de  $\mu$  y  $\theta$  de los pasos (1) y (2) es entonces (para un período  $T_o$  y un sismo dado)

$$\alpha = \frac{F_{y0\theta}}{F_{y00}} \quad (46)$$

Los pasos anteriormente descritos se llevaron a cabo para una matriz de 37 períodos (uniformemente distribuidos entre 0.2 y 2.0 segs.), 8 valores de  $\theta$  (nueve incluyendo  $\theta = 0$ ), 6 ductilidades (1, 2, 3, 4,5 y 6) y dos acelerogramas del sismo del Centro California de Mayo 18, 1940. Considerando las iteraciones necesarias se calcularon aproximadamente 12,000 ordenadas espectrales en la generación de la data. Dada la importancia que tiene la duración del sismo en los casos donde se considera la respuesta no lineal junto al efecto P- $\Delta$  (1,7,8), los eventos se consideraron en toda su extensión (aprox. 60 seg.). La digitación de los acelerogramas se tomó de la ref. 12.

La limitación en la ductilidad máxima introducida por consideraciones de estabilidad se manejó como se describe a continuación: en las combinaciones de  $\mu$  y  $\theta$  donde no se satisface la restricción en  $\mu$  establecida en la ec. 37 el valor de  $F_{y0\theta}$  del paso (2) se calculó en base a la ductilidad límite, o sea,  $0.4/\theta$  (ver ec. 37) de esta forma el factor de amplificación considera de manera implícita la limitación en la ductilidad máxima. Por ejemplo, para calcular los espectros de amplificaciones en el caso  $\mu = 4$  y  $\theta = 0.15$  se calculó  $F_{y0}$  con  $\mu = 4$  y  $\theta = 0$  pero al calcular  $F_{y0\theta}$ , para formar en cada período el cociente de la ec. 46 se utilizó  $\mu = 0.4/0.15 = 2.67$ . El tratamiento

implícito de la restricción que impone la ec. 37 sobre la máxima ductilidad es conveniente desde el punto de vista práctico pues permite que el criterio utilizado en la selección de la ductilidad de diseño no requiera modificaciones. Adicionalmente, los coeficientes de estabilidad, necesarios para tratar de manera explícita la limitación en  $\mu$ , son difíciles de evaluar en las etapas iniciales del proceso de análisis.

## Resultados

La fig. 8 ilustra el espectro de amplificación para la componente S90W del sismo del Centro en el caso de ductilidad 4 y coeficiente de estabilidad 0.1. Como puede verse, las ordenadas presentan la variación típica de espectros sísmicos no suavizados. La data básica generada en este trabajo consiste en 96 espectros similares al presentado en la fig. 8; en términos generales los resultados presentados en la figura pueden considerarse representativos del conjunto.

Un aspecto al que se le dedicó especial atención fue el determinar si existe una correlación importante entre la amplificación,  $\alpha$ , y el período natural de vibración  $T_0$ . En el caso que se ilustra en la fig. 8 es aparente una tendencia de reducción en la amplificación para períodos mayores de cierto valor (aprox. 1.2 segs. en este caso), esta tendencia fue observada en todos los espectros de amplificación con ductilidades de 3 o mayores; en el caso elástico y con ductilidad 2 los espectros oscilan con relación a un valor prácticamente constante.

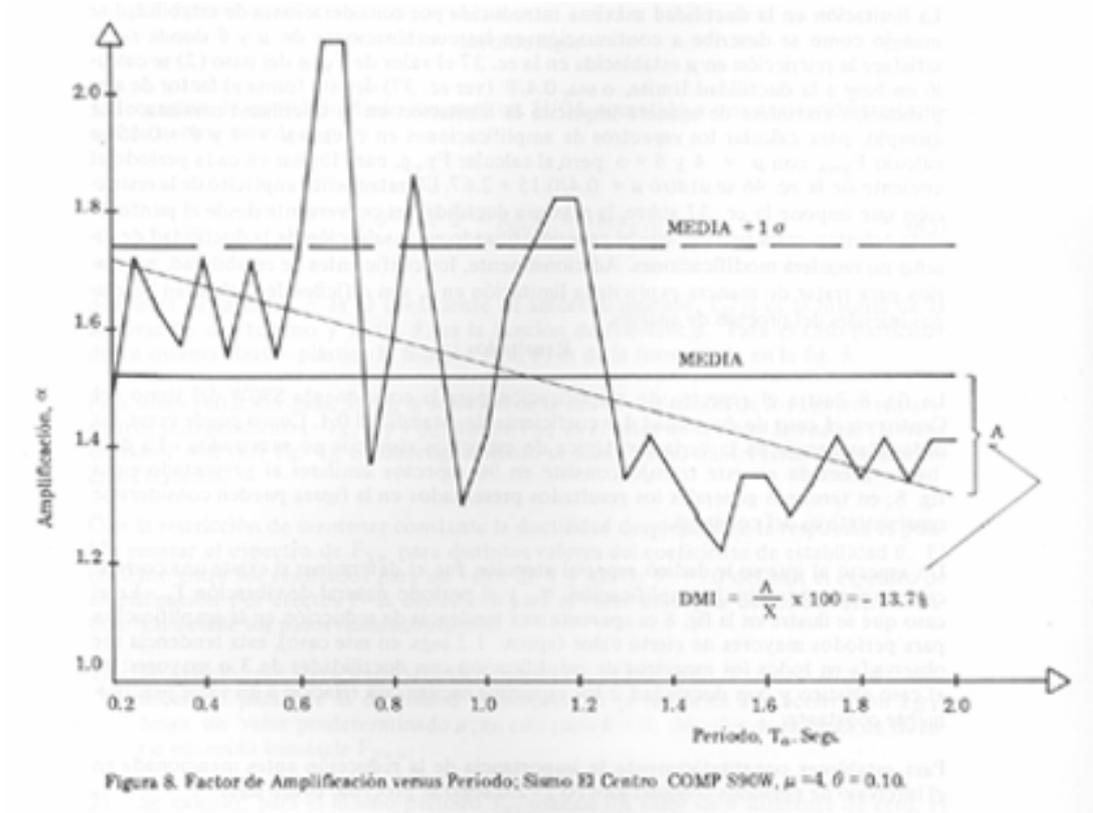
Para establecer cuantitativamente la importancia de la reducción antes mencionada en el intervalo de períodos considerados (0.2-2.0 segs) se procedió como sigue:

- 1) Se calculó para cada uno de los 96 espectros la ecuación de la línea de mínimos cuadrados que relaciona  $\alpha$  con  $T_0$ . Para el caso de data que, con la aquí considerada, sólo “sube” o “baja” en el intervalo de interés (o sea no tiene máximos y/o mínimos) la pendiente de esta línea indica la dirección y es numéricamente igual (en promedio) a la velocidad de variación de la variable dependiente.
- 2) Se definió el parámetro DMI (desviación máxima en el intervalo) como el cociente, en porcentaje, entre la máxima desviación de la ecuación de mínimos cuadrados con relación a la media, y la media, para el rango de períodos considerados.

Un valor de DMI del 10% indica que si la data es representada por una recta de mínimos cuadrados, o simplemente por la media, la máxima diferencia entre las dos predicciones analíticas en el rango considerado es del 10% de la media. En la fig. 8 se ilustra la definición del parámetro DMI y el valor numérico que tiene en ese caso particular. El promedio de los valores de DMI para cada una de las ductilidades consideradas (promedio de 16 valores en cada caso) se presentan en la tabla 1.

Como puede verse, los máximos valores del parámetro DMI son del orden del 12%; en base a estos resultados y considerando la naturaleza del problema, se decidió eliminar el período natural y trabajar solo con las medias y los coeficientes de variación. La tabla 1 presenta, adicionalmente a

los valores de DMI, los promedios de los coeficientes de variación para cada una de las ductilidades consideradas.



**TABLA 1**

Valores Promedios de DMI y del Coeficiente de Variación

Ductilidad $\mu$	DMI*	COV
1	2.63	0.11
2	0.16	0.12
3	-9.08	0.13
4	-11.24	0.15
5	-11.52	0.17
6	-12.29	0.17

\*El signo negativo indica que la amplificación decrece al aumentar el período.

Las figs. 9-14 ilustran los resultados obtenidos para la amplificación media, y la media más una desviación standard, versus coeficiente de estabilidad, para ductilidad constante. Los puntos representan el promedio de las medias para los dos acelerogramas utilizados y los triángulos se obtuvieron sumándole a la media global la desviación standard del conjunto de ordenadas espectrales de los dos sismos.

### Formulación Propuesta

La información presentada en las figs. 9-14 permite estudiar la relación existente entre la ductilidad, el coeficiente de estabilidad y la amplificación; el objetivo es por supuesto obtener una expresión que permita calcular, con razonable precisión, la amplificación por efectos P- $\Delta$  no lineales dados el valor de  $\mu$  y  $\theta$ . En base a ciertos estudios sobre la "forma" de los resultados obtenidos, complementados por consideraciones sobre el comportamiento que debe tener la ecuación en los límites, se planteó la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{1 + \beta\theta}{1 - \theta} \quad (47a)$$

Donde  $\beta$  es una función de la ductilidad. Utilizando regresión lineal con mínimos cuadrados y ajustando ligeramente los resultados para obtener números redondos y comportamiento congruente con límites conocidos, se llegó a que la función  $\beta$  está dada por

$$\beta = 1.5 (\mu - 1) \quad (47b)$$

La ec. 47a con  $\beta$  dada por la ec. 47b está graficada con línea continua en las figs. 9-14. Como puede verse la expresión propuesta representa con excelente precisión la amplificación media en el caso de ductilidades de 4,5 y 6; para ductilidades de 2,3 y en el caso elástico la ec. 47 conduce a resultados que se encuentran entre la media y la media más una desviación standard ( $1\sigma$ ).

La ec. 47 se dedujo con la intención de que representará lo mejor posible la data en las ductilidades de 3 y mayores ya que estos son los casos de mayor relevancia práctica. Se decidió seleccionar la media como objetivo de predicción (y no una medida más "conservadora" de los resultados como sería la media +  $1\sigma$  por ejemplo) por considerarse, entre otras cosas, que la formulación del problema en base a una idealización elasto-plástica es conservadora en relación con el comportamiento esperado en un sistema típico de varios grados de libertad. En este último caso la secuencia no simultánea de fluencias locales conduce (despreciando P) a una relación carga deformación cuya pendiente, post-fluencia efectiva, es positiva.

Para el caso de la media +  $1\sigma$  se realizó un análisis similar al descrito anteriormente y se encontró que  $\beta$  está dada por

$$\beta = 2.0 (\mu - 1)$$

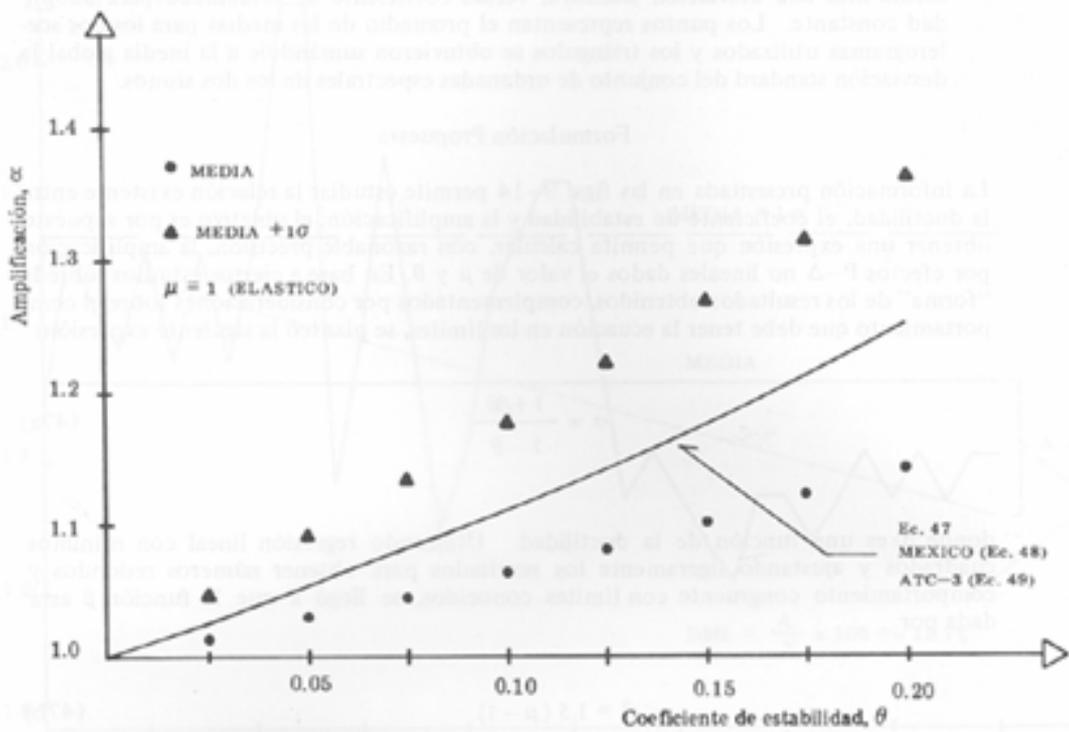


Figura 9. Amplificación versus Coeficiente de estabilidad ;  $\mu = 1$

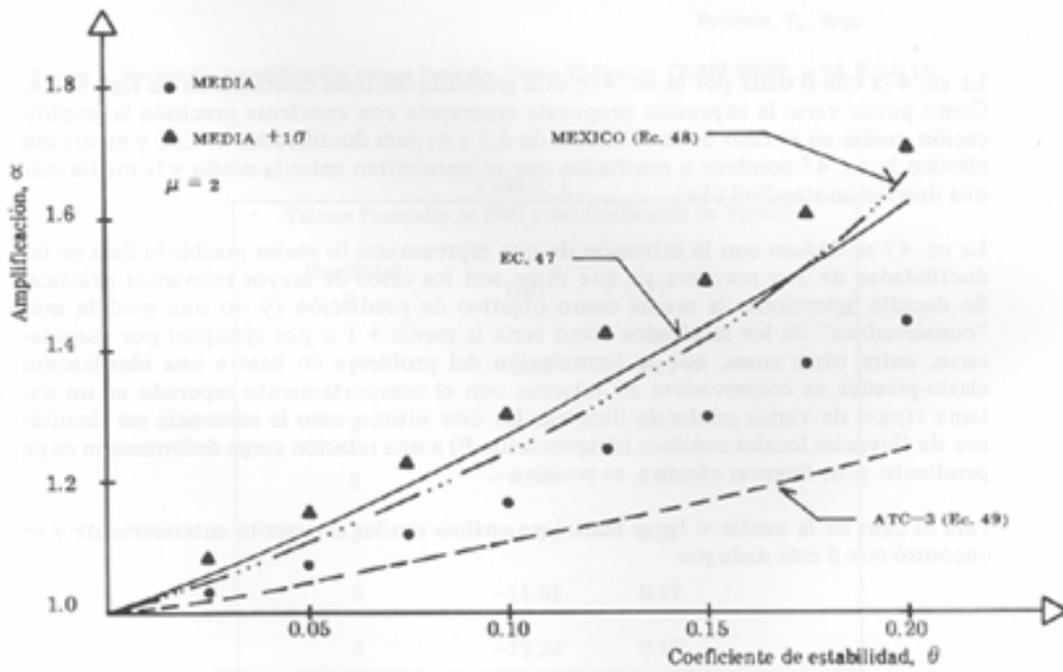


Figura 10. Amplificación versus Coeficiente de estabilidad ;  $\mu = 2$

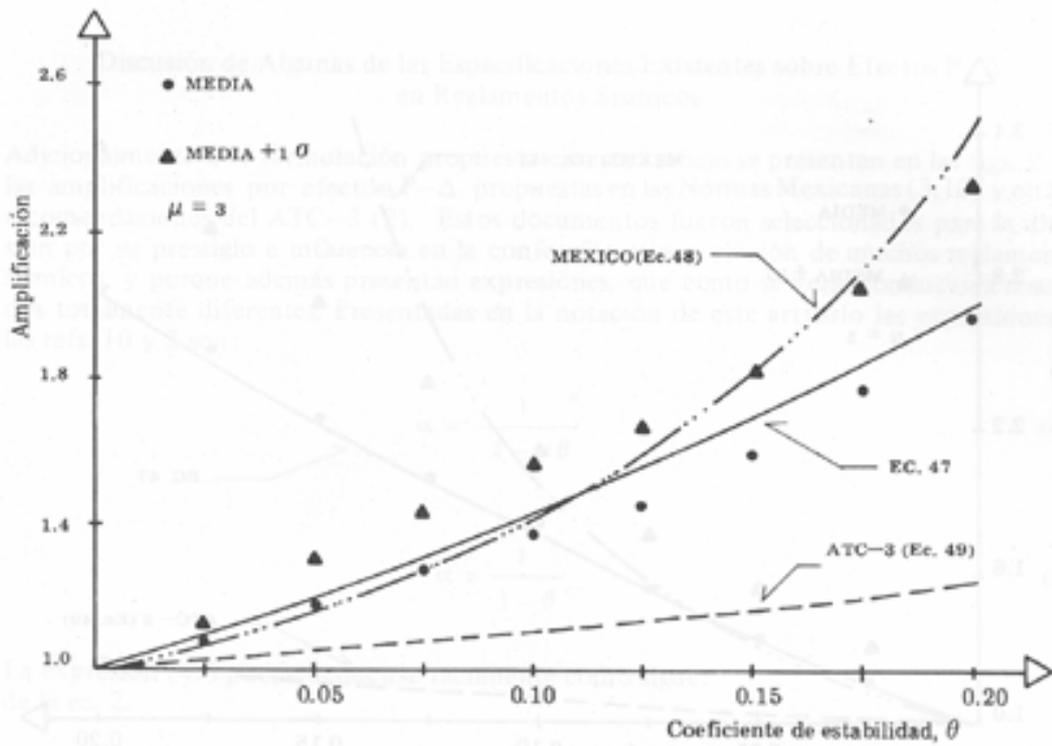


Figura 11. Amplificación versus Coeficiente de Estabilidad;  $\mu = 3$

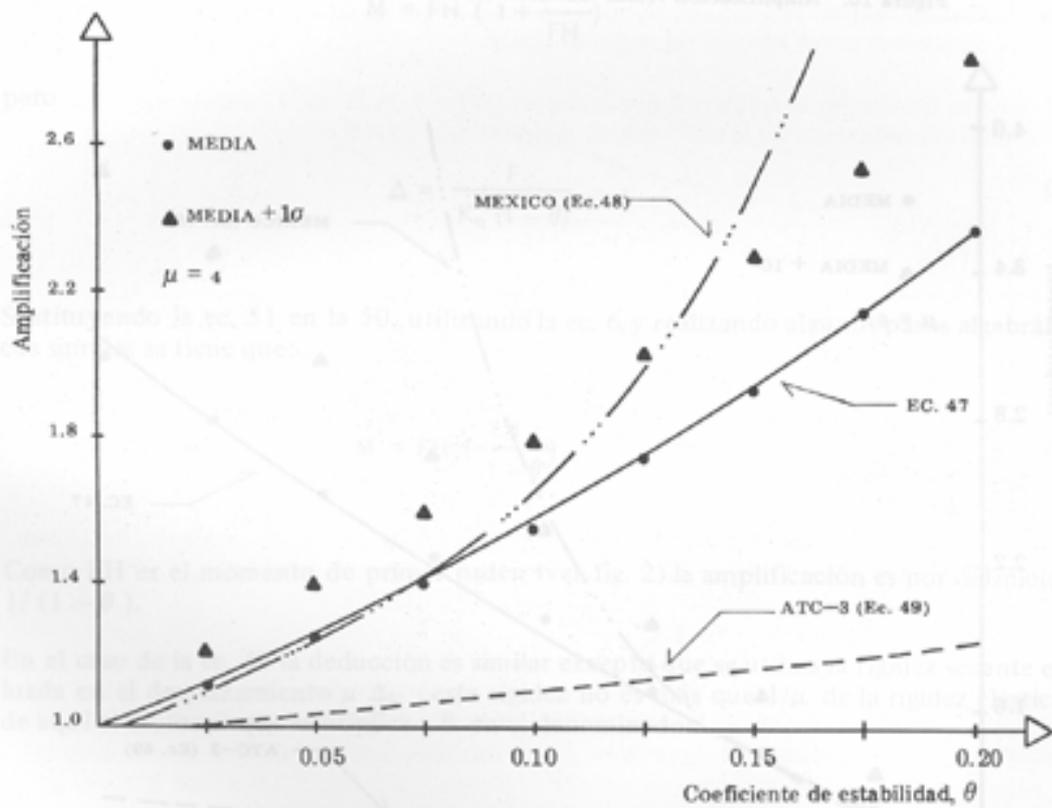


Figura 12. Amplificación versus Coeficiente de estabilidad;  $\mu = 4$

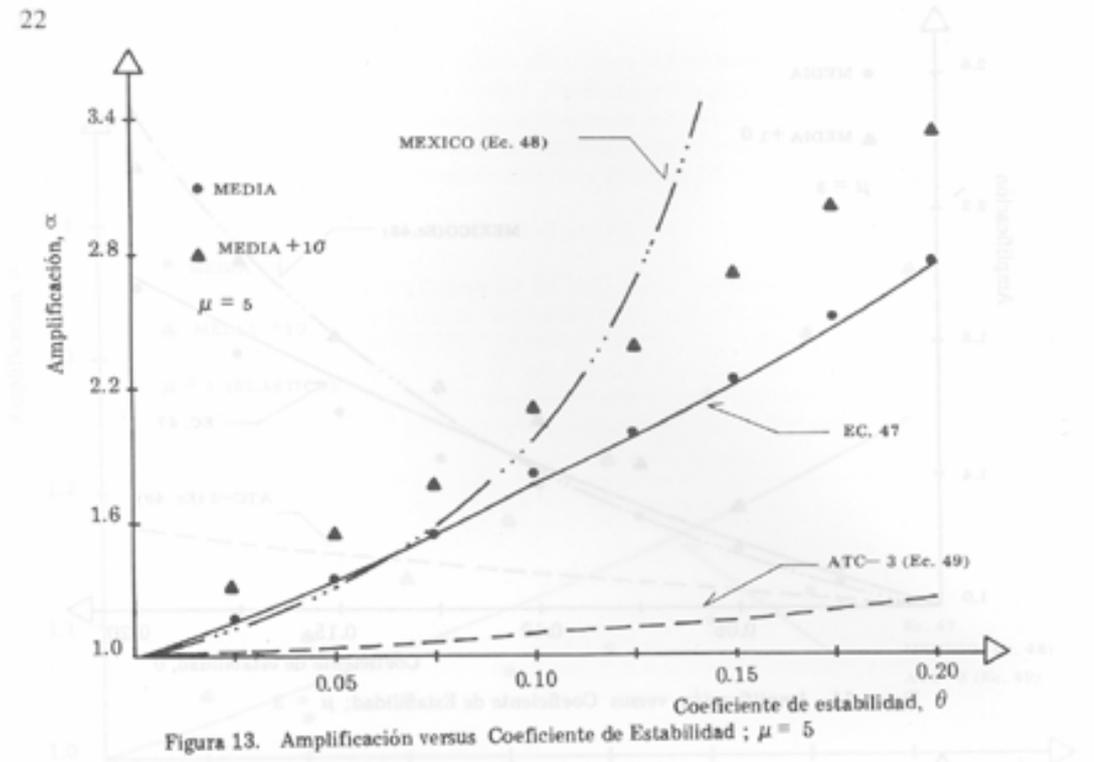


Figura 13. Amplificación versus Coeficiente de Estabilidad ;  $\mu = 5$

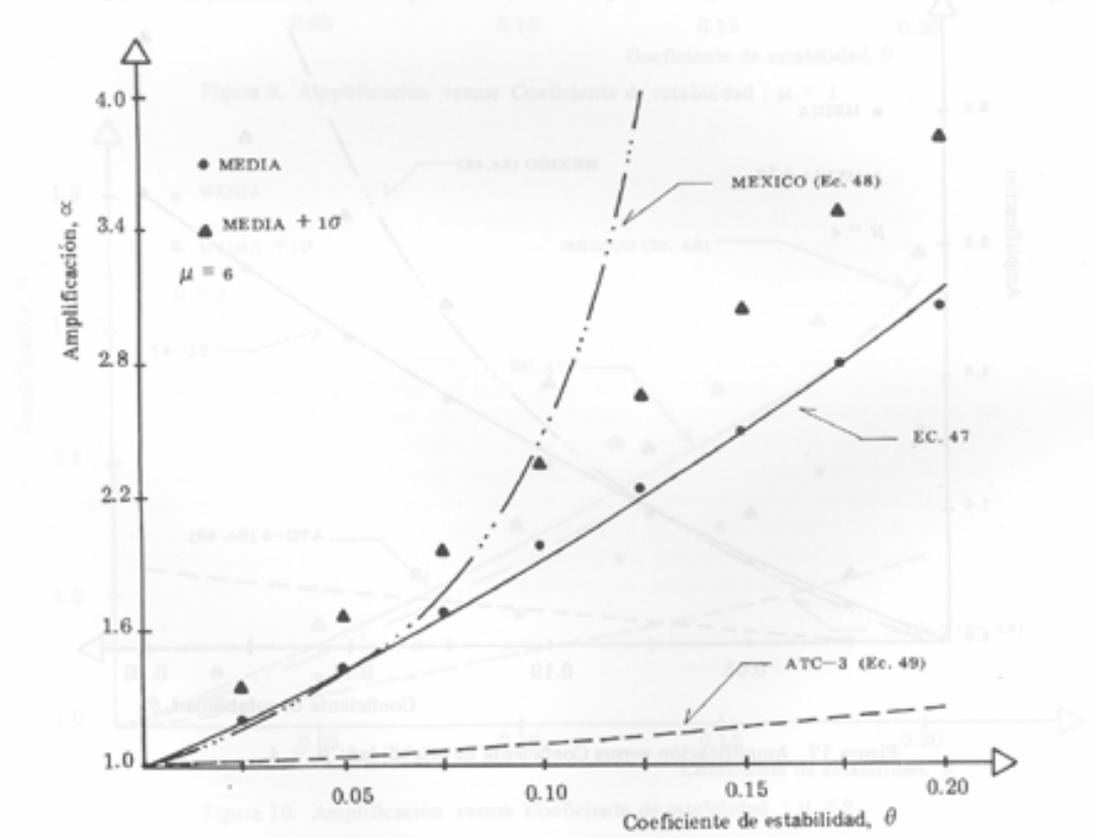


Figura 14. Amplificación versus Coeficiente de Estabilidad ;  $\mu = 6$

## Discusión de Algunas de las Especificaciones Existentes sobre Efectos P-Δ en Reglamentos Sísmicos

Adicionalmente a la formulación propuesta en este trabajo se presentan en las figs. 9-14 las amplificaciones por efectos P-Δ propuestas en las Normas Mexicanas (3,10) y en las recomendaciones del ATC-3 (2). Estos documentos fueron seleccionados para la discusión por su prestigio e influencia en la confección y/o evolución de muchos reglamentos, sísmicos y porque además presentan expresiones, que como se verá, conducen a resultados totalmente diferentes. Presentadas en la notación de este artículo las expresiones de las refs. 10 y 2 son:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \mu \theta} \quad (48)$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - \theta} \quad (49)$$

La expresión (49) puede deducirse fácilmente como sigue:  
de la ec. 2

$$M = FH \left( 1 + \frac{P\Delta}{FH} \right) \quad (50)$$

pero

$$\Delta = \frac{F}{K_0 (1 - \theta)} \quad (51)$$

Sustituyendo la ec. 51 en la 50, utilizando la ec. 6, y realizando algunos pasos algebraicos simples se tiene que:

$$M = FH \left( \frac{1}{1 - \theta} \right) \quad (52)$$

Como FH es el momento de primer orden (ver fig. 2) la amplificación es por definición  $1 / (1 - \theta)$ .

En el caso de la ec. 48 la deducción es similar excepto que se utiliza la rigidez secante evaluada en el desplazamiento  $\mu \Delta$ ; esta rigidez no es más que  $1/\mu$  de la rigidez elástica y de aquí el factor  $\mu$  que multiplica a  $\theta$  en el denominador.

- El 1.2 que aparece en la ecuación de la ref. 10 es un factor de corrección para considerar la desviación, en la relación a una recta, de las elásticas de las columnas. En este caso no debe incluirse, ya que el modelo es de columna rígida.

Puede verse en las figs. 9-14 que la ecuación del Reglamento Mexicano predice con muy buena precisión las amplificaciones por efectos P-Δ siempre y cuando éstas no sean muy altas. A partir de cierto valor de  $\alpha$ , dependiendo de la ductilidad que se trate, la predicción diverge; por ejemplo en  $\mu = 6$  y  $\theta = 0.15$  la ec. 48 predice  $\alpha = 10.0$  mientras que la amplificación media obtenida es de 2.5 (ver fig. 14). Es importante resaltar que para el rango de valores de  $\alpha$  de interés práctico (digamos  $\alpha \leq 1.5$ ) la ec. 48 es totalmente adecuada. El hecho de que la formulación de la NM, proveniente de una extrapolación del comportamiento estático lineal produzca resultados que en el rango de interés concuerdan con la data aquí generada provee un indicio de que los resultados son probablemente poco sensitivos a las características específicas del movimiento del terreno.

Con relación a la ec. 49 cabe mencionar que ésta no aparece en el texto de las recomendaciones del ATC-3 sino en los comentarios (Pág. 367 ref. 2). La subestimación de las amplificaciones P-Δ a que conduce esta ecuación es aparente al inspeccionar las figs. 10-14; solo en el caso elástico (de escaso interés práctico) la recomendación del ATC-3, coincidiendo con las demás formulaciones, conduce a resultados razonables. En todos los demás casos las predicciones son totalmente inadecuadas.

### **Sobre el Problema de Cuando Pueden Despreciarse los Efectos P-Δ**

De considerable interés práctico es el asunto de establecer en cuáles casos pueden omitirse las consideraciones sobre efectos de segundo orden.

Si se acepta despreciar amplificaciones menores de un 10% la ec. 47 conduce al siguiente límite para el coeficiente de estabilidad,  $\theta$ , denominado aquí  $\theta_c$

$$\theta_c = \frac{0.1}{(\beta + 1.1)} \quad (53)$$

El criterio para limitar  $\alpha$  a menos de 1.1 puede también expresarse en términos de la distorsión de entrepiso,  $\Psi$ ; combinando las ecs. 43 y 53 se tiene alternativamente

$$\Psi \leq \frac{0.1 C}{(\beta + 1.1)} \quad (54)$$

La limitación que para los mismos fines presenta el Reglamento Sísmico Mexicano (3) es:

$$\psi \leq \frac{0.08 C}{\mu} \quad (55)$$

Las ecs. 54 y 55 conducen a resultados muy similares en todo el rango de valores de  $\mu$  de interés.

En lo que respecta a las recomendaciones del ATC-3 (2), se establece en la sección 4.6.2 de este documento que los efectos P- $\Delta$  pueden despreciarse cuando el coeficiente de estabilidad es menor o igual a 0.1. Es aparente al inspeccionar las figs. 10-14 que esta estipulación es totalmente inadecuada.

La fig. 15 ilustra los máximos valores que puede alcanzar la amplificación cuando la distorsión de entrepiso,  $\psi$ , esta limitada a 0.01. Como puede verse, estas amplificaciones son función de la ductilidad y del coeficiente sísmico de diseño, C, (C no incluye reducción por ductilidad). Considérese el caso  $\mu = 4$ ; de la fig. puede verse que la restricción en  $\Psi$  asegura que la amplificación no exceda el 10% solo para un coeficiente sísmico elástico mayor o igual a 0.56, esta condición se satisface, por supuesto, solo en casos excepcionales.

El estudio de los resultados que se representan en la fig. 15 permite concluir que las limitaciones reglamentarias sobre la distorsión de entrepiso no pueden, en general, fungir como única restricción para evitar efectos P- $\Delta$  excesivos; los reglamentos sísmicos deben incluir un tratamiento explícito del asunto con expresiones del tipo de la ec. 47 y 54.

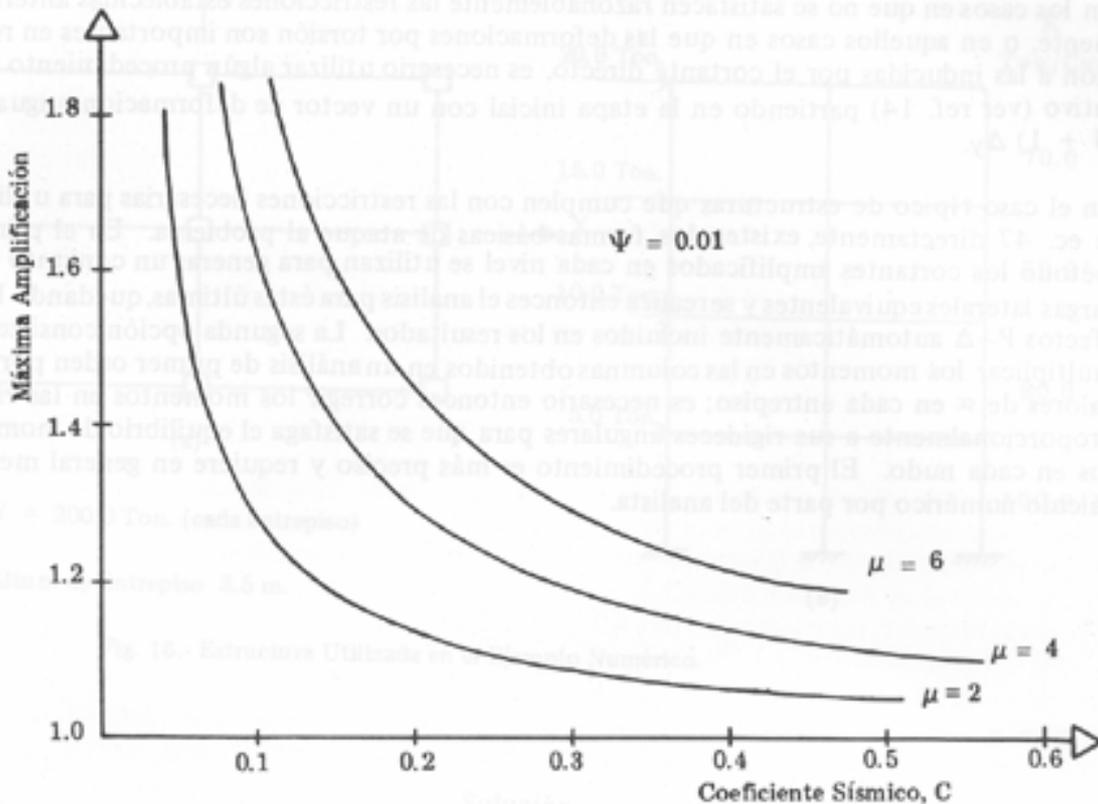


Fig. 15.- Máxima Amplificación Versus Coeficiente Sísmico;  $\Psi = 0.01$

### ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE EL USO DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN EN ESTRUCTURAS MULTIPISOS

Aunque la ec. 47 está deducida en base a consideraciones sobre un sistema de un grado de libertad su utilización en el caso de estructuras multipisos es factible mediante la generalización de los parámetros relevantes. El coeficiente de estabilidad puede evaluarse con la ec. 6 tomando P como la carga gravitatoria por encima del nivel considerado y H y K como la altura y la rigidez del entrepiso respectivamente. El valor de  $\theta$  puede también calcularse como la ec. 43; en este caso el coeficiente C es el cociente entre el cortante en el entrepiso y la carga vertical por encima del nivel.

La utilización del procedimiento antes descrito supone tácitamente que el cociente entre el cortante y la distorsión en cada entrepiso es independiente de la distribución vertical de la carga lateral, o, si esto no es cierto, que las amplificaciones en toda la altura son aproximadamente iguales. En el caso de estructuras aporticadas la primera condición se cumple con muy buena aproximación para un extenso rango de distribuciones de carga lateral (esta es la base del éxito de las fórmulas de Wilbur (13)). Cuando se consideran estructuras que incluyen muros, el concepto de rigidez de entrepiso solo tiene sentido asociado a una distribución específica de cargas laterales; en estos casos, si la amplificación es aproximadamente constante con la altura, la distribución de carga

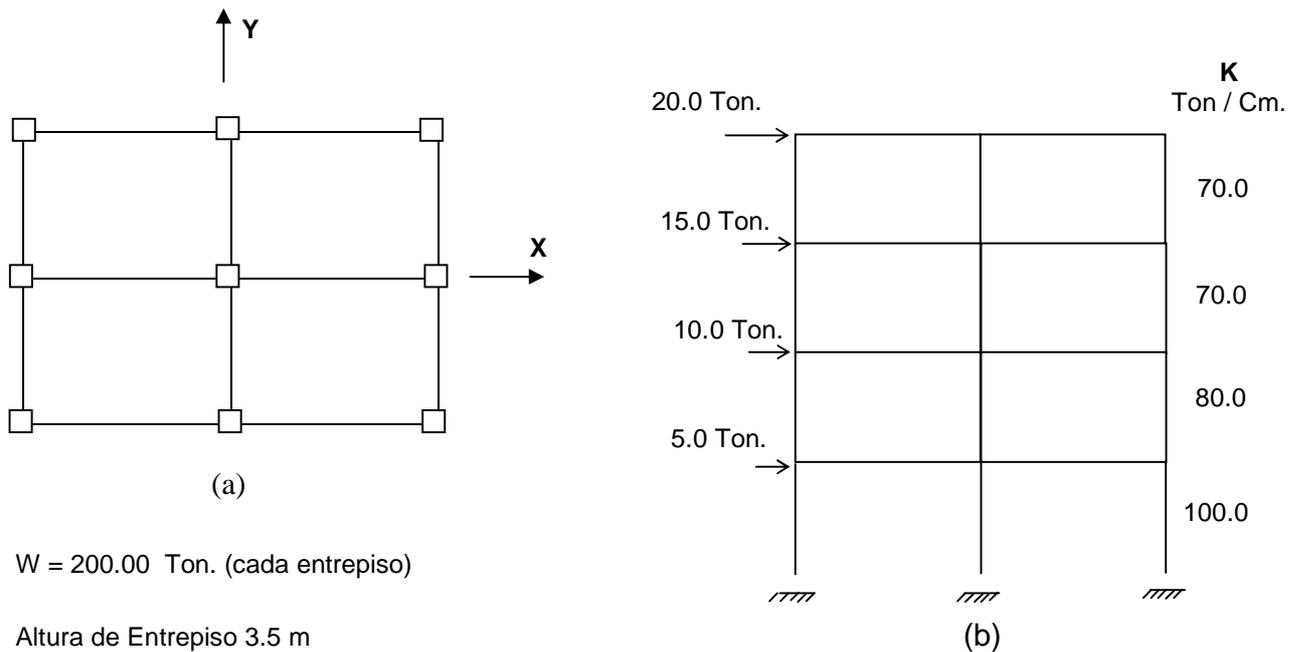
lateral no varía en el proceso de amplificación y la ec. 47 puede utilizarse directamente; cuando esta condición no se cumple, el cálculo de  $\theta$  en base a las distorsiones de primer orden es inválido.

En los casos en que no se satisfacen razonablemente las restricciones establecidas anteriormente, o en aquellos casos en que las deformaciones por torsión son importantes en relación a las inducidas por el cortante directo, es necesario utilizar algún procedimiento iterativo (ver ref. 14) partiendo en la etapa inicial con un vector de deformaciones igual a  $(\beta + 1) \Delta y$ .

En el caso típico de estructuras que cumplen con las restricciones necesarias para utilizar la ec. 47 directamente, existen dos formas básicas de ataque al problema. En el primer método los cortantes amplificados en cada nivel se utilizan para generar un conjunto de cargas laterales equivalentes y se realiza entonces el análisis para éstas últimas, quedando los efectos P- $\Delta$  automáticamente incluidos en los resultados. La segunda opción consiste en multiplicar los momentos en las columnas obtenidos en un análisis de primer orden por los valores de  $\infty$  en cada entrespe; es necesario entonces corregir los momentos de las vigas proporcionalmente a sus rigideces angulares para que se satisfaga el equilibrio de momentos en cada nudo. El primer procedimiento es más preciso y requiere en general menos cálculo numérico por parte del analista.

## EJEMPLO

La fig. 16a muestra una planta de un edificio de 4 pisos soportado por marcos en ambas direcciones. En la parte (b) de la figura se consignan las rigideces de entrepiso calculadas con las fórmulas de Wilbur y las cargas laterales en la dirección Y; se supone que estas cargas han sido calculadas en base a una reducción por ductilidad  $\mu$  igual a 5. Calcule el vector de cargas laterales equivalente que incluye los efectos P- $\Delta$ .



$W = 200.00$  Ton. (cada entrepiso)

Altura de Entrepiso 3.5 m

Fig. 16. Estructura Utilizada en el Ejemplo Numérico.

## Solución

El coeficiente de estabilidad en cada entrepiso se calcula con la ec. 6 tomando P igual al valor de la carga gravitacional localizada por encima del nivel considerado. Una vez calculados los valores de  $\theta$ , las amplificaciones en cada nivel se calculan con la ec. 47; en este caso

$$\beta = 1.5 (5 - 1) = 6$$

y

$$\theta_c = \frac{0.1}{(6 + 1.1)} = 0.014$$

Para el primer entrepiso

$$\theta_1 = \frac{800}{350 \cdot 100} = 0.0229$$

por lo que

$$\alpha_1 = \frac{1 + 6 \times 0.0229}{(1 - 0.0229)} = 1.164$$

Incluyendo la amplificación P-Δ, el cortante de diseño en el 1er. Nivel es:

$$V_1 = 1.164 \times 50 = 58.2 \text{ Ton.}$$

la distorsión del 1er entrepiso es

$$\Psi_1 = \frac{58.2 \times 5}{100 \times 350} = 0.0083$$

los cálculos para el resto de la estructura se presentan en la siguiente Tabla.

**TABLA 2**

Nivel	P=Σw Ton.	K Ton/cm	h cm	Solución del ejemplo				Ψ= $\frac{\infty V \mu^{**}}{Kh}$	Vector de cargas Laterales Equiv.
				θ (ec. 6)	∞ (ec.47)	V Ton	∞V Ton		
4	200	70.0	350	0.0082*	1.058	20	21.16	0.0043	21.16
3	400	70.0	350	0.0163	1.116	35	39.06	0.0080	17.90
2	600	80.0	350	0.0214	1.153	45	51.89	0.0093	12.83
1	800	100.0	350	0.0229	1.164	50	58.20	0.0083	6.31

\* Esta amplificación podría despreciarse de acuerdo a la ec. 54

\*\* Estos valores deben ser ≤ que la restricción reglamentaria.

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se presenta una revisión de los aspectos básicos del efecto P- $\Delta$  en la respuesta de sistemas de un grado de libertad sometidos a excitación sísmica.

Cuando se tratan sistemas elásticos las cargas gravitacionales tienden a alargar el período natural y pueden ya sea aumentar o disminuir la amplitud de la respuesta dinámica. Desde el punto de vista computacional el efecto de esbeltez puede en estos casos considerarse equivalente a una reducción en la rigidez lateral de  $K$  a  $K(1 - \theta)$  donde  $\theta$  es el coeficiente de estabilidad (ec. 6).

Cuando la perturbación sísmica está definida mediante un espectro elástico suavizado, la elongación del período puede combinarse con la expresión matemática de las ordenadas espectrales para obtener soluciones cerradas para el factor de amplificación. Los resultados permiten concluir que los efectos P- $\Delta$  dinámicos en estructuras elásticas son usualmente despreciables.

En sistemas inelásticos las fuerzas gravitacionales, adicionalmente a la elongación en el período original reducen la fuerza efectiva de fluencia y pueden conducir a rigideces tangentes negativas en la porción post-fluencia de la curva carga-deformación. Para sistemas elasto-plásticos, como los considerados en este trabajo, la pendiente de la porción plástica siempre resulta ser negativa e igual a  $K\theta$ . A diferencia del caso elástico donde los efectos de esbeltez son generalmente pequeños, en estructuras inelásticas los efectos P- $\Delta$  modifican la respuesta dinámica de manera significativa.

En estructuras diseñadas para responder en el rango no lineal las deformaciones permanentes inducidas por el sismo reducen el factor de seguridad por inestabilidad ante cargas verticales. En algunas ocasiones, especialmente en estructuras flexibles localizadas en zonas de baja o moderada sismicidad, para evitar una reducción excesiva en la carga crítica vertical, es necesario limitar la ductilidad de diseño a valores menores que los dictados por la estructuración, material, o tipo de detalles estructurales. La restricción en la ductilidad,  $\mu$ , utilizada en este trabajo es de  $0.4/\theta$  y se dedujo en base a mantener una carga crítica gravitacional post-sismo de  $1.4 D + 1.7 L$  donde  $D$  es la carga muerta y  $L$  es la carga viva de diseño. Los factores de amplificación por efectos P- $\Delta$  que se presentan, incluyen la limitación en  $\mu$  de manera implícita.

La data básica generada en este trabajo consiste en 96 espectros de amplificación calculados en base a mantener la demanda de ductilidad en la repuesta independiente de la acción de las cargas verticales. Se define amplificación como el cociente entre el nivel de fluencia necesario para una respuesta con ductilidad  $\mu$  entre el necesario cuando el efecto P- $\Delta$  se desprecia. Los cálculos se realizaron para 54 combinaciones de ductilidad y coeficiente de estabilidad utilizando dos acelerogramas del sismo de El Centro.

Para el intervalo de períodos estudiados (0.2-2 segs.) el análisis estadístico de la data, sopesado por ciertas consideraciones prácticas, condujo a la selección de la amplificación como

independiente del período. Se caracterizó entonces cada uno de los espectros por la amplificación media y el coeficiente de variación.

Se proponen expresiones para calcular las amplificaciones por efectos P- $\Delta$  y para decidir en cuales casos estos efectos pueden ser despreciados. Se sostiene que no es posible, en general, relegar el control de los efectos de esbeltez a las restricciones reglamentarias sobre la distorsión de entepiso,  $\Psi$ . El tratamiento racional del problema demanda el uso de expresiones que incluyan, además de  $\Psi$ , la ductilidad de diseño y el coeficiente sísmico.

En base a los resultados obtenidos en este trabajo se presenta una discusión de las estipulaciones que sobre efectos P- $\Delta$  aparecen en las Normas Mexicanas (NM) (3,10) y en las Recomendaciones del ATC-3 (2). En el caso de la NM se encontró que la ecuación propuesta para el cálculo de la amplificación, es totalmente adecuada en el rango de valores de  $\infty$  de interés práctico; para valores elevados de  $\infty$  la ecuación diverge. En lo que respecta al criterio para despreciar efectos de esbeltez la estipulación de la NM es totalmente congruente con los resultados aquí obtenidos. La ecuación propuesta en el ATC-3 (comentarios) subestima drásticamente las amplificaciones, excepto en el caso elástico (de escaso interés en el diseño sísmico de edificaciones). El criterio que establece la ref. 2 de  $\theta \leq 0.1$ , como límite hasta donde pueden despreciarse los efectos P- $\Delta$ , es totalmente inadecuado.

La utilización de los factores de amplificación en el caso de estructuras multipisos requiere de ciertas generalizaciones. Al final de este trabajo se presentan algunos breves comentarios al respecto y se complementan con un sencillo ejemplo numérico.

Cabe resaltar que los resultados aquí obtenidos están basados únicamente en dos acelerogramas registrados a distancias epicentrales moderadas y en terreno firme. La influencia que en las amplificaciones puedan tener las características específicas del movimiento del terreno no han sido consideradas explícitamente en este estudio. Es sin embargo la impresión del autor, que para valores de  $\infty$  no muy altos, los resultados son poco sensitivos al contenido de frecuencia del evento. Estudios adicionales con registros de características sustancialmente diferentes a las de El Centro son por supuesto recomendables.

Los resultados obtenidos en este trabajo constituyen la base de las estipulaciones que sobre efectos P- $\Delta$  aparecen en la propuesta para el nuevo Reglamento Sísmico Dominicano (4).

## REFERENCIAS

1. Newmark, N.M. y E. Rosenblueth "Fundamentals of Earthquake Engineering, "PrenticeHall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
2. "Tentative Provisions for the Development of Seismic Regulations for Building." Applied Technology Council (ATC-3), Junio 1978.
3. "Manual de Diseño por Sismo". Según el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal; Instituto de Ingeniería No.406, Julio 1977
4. "Reglamento Sísmico Dominicano (Edificaciones)", Versión Preliminar. Dirección General de Reglamentos y Sistemas; Secretaria de Estado de Obras Públicas y Comunicaciones, 1984.
5. Newmark, N.M. y W.L Hall, "Procedures and Critica for Earthquake Resistant Design". National Workshop on Building Practice for Disaster Mitigation, Septiembre 1972.
6. Dionisio Bernal, "Seismic Design of Reinforced Concrete Buildings; an Inelastic Response Spectrum Approach." Tesis Doctoral, Universidad de Tennessee, Agosto 1979.
7. Raúl Husid, "Gravity Effects on the Earthquake Response of Yielding Structures" Earthquake Engineering Research Laboratory Report, California Institute of Technology, 1967
8. Raúl Husid, "The Effect of Gravity on the Collapse of Yielding Structures With Earthquake Excitación". Proc. Fourth World Conference on Earthquake Enginnering; Santiago de Chile, 1969.
9. Popov.E.P. y V.V. Bertero, "On Seismic Behavior of Two R/C Structural- Systems for Tall Buildings". Structural and Geotechnical Mechanics, Edited by W.J. Hall, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977.
10. "Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto". Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal; Instituto de Ingeniería No. 401, Julio 1977.
11. "ACI Standard Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83)" ACI Committee 318 Report, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 1983.
12. "Strong Motion Earthquake Accelerograms" digitized and plotted data, Volume II-Correted Accelerograms and Integrated velocity and displacement curves, Part A; California Institute of Technology, 1973.
13. Wilbur, J.B., "Distribution of wind loads to the bents of a Building", journal of the Boston Society of Civil Engineers, 1955.

14. Rosenblueth, E., "Efectos de Esbeltez en Edificios", Instituto de Ingeniería No. 109, Enero 1965.